Мастер-класс Андрея Коновалова
«Геометрия в физике. Современные идеи»
Часть 2. «Оптимальный бросок»

Теорема 1. «О медиане в треугольнике скоростей». Докажите, что средняя скорость при равноускоренном движении $\langle\vec{V}\rangle = \frac{\vec{S}}{t}$ является медианой в треугольнике скоростей $\vec{V}_K = \vec{V}_0 + \vec{g}t$. Перемещение за время t движения задаётся уравнением $\vec{S} = \vec{V}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}$.

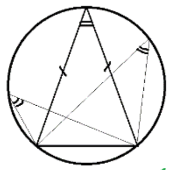
Теорема 2. «О квадратах скоростей». Докажите, что квадраты конечной скорости и начальной скорости связаны только через разность высот начальной и конечной точки и не зависят от углов $V_K{}^2 = V_0{}^2 - 2gH$.

Теорема 3. «О площади треугольника скоростей». Докажите, что площадь треугольника скоростей равна половине произведения дальности полета на ускорение свободного падения $S_\Delta = \frac{1}{2}Lg$.

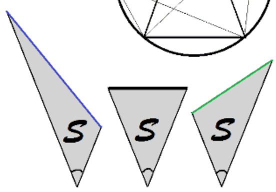
Теорема 4. «О настильной и навесной траектории». Докажите, что соответствующие половинки треугольников скоростей для настильной и навесной траектории равны.

Используйте признак равенства равновеликих треугольников: «два равновеликих треугольника с равным углом и равной противоположной стороной равны».

Теорема 5. «О максимальной площади». Если задан угол треугольника и противолежащая к этому углу сторона, то максимальная площадь достигается в случае *равнобедренного треугольника*.



Теорема 6. «О минимальной стороне». Если задана площадь и угол треугольника, то минимально возможная противолежащая к этому углу сторона достигается в случае *равнобедренного треугольника*.



Задача 1 «Разогревочная». Кот Леопольд, находясь на крыше дома, два раза выстрелил в противоположных направлениях с одинаковыми скоростями камушками из рогатки. Перед падением на землю скорости камушков были направлены перпендикулярно друг другу. Определите высоту *h* дома, если известно, что суммарное время полёта камушков t_0 = 3с, а времена их движения отличаются в два раза. С какой скоростью камушки были выпущены из рогатки? (ВсОШ, 2021, Региональный этап, 9 кл)

Задача 2. Небольшую петарду подвесили на нити на высоте *H* над горизонтальной поверхностью. В результате взрыва она распалась на два осколка, которые полетели в противоположные стороны с одинаковыми начальными скоростями V_0, направленными вдоль одной прямой. Какое наибольшее расстояние *L* может оказаться между осколками после их падения? С места падения осколки не смещаются. (ВсОШ, 2017, Региональный этап, 9 кл)

Краткая математическая справка: напомнить/рассказать школьнику **о неравенстве Птолемея**.

Краткая математическая справка: напомнить/рассказать школьнику о конических сечениях, фокусе, фокальном параметре, эксцентриситете и директрисе, записать уравнение конических сечений в полярных координатах, сделать акцент на параболе.

Определение границы досягаемости: геометрическое место точек, до которых можно добросить тело единственно возможным образом, бросая из одной точки всегда с постоянной скоростью (траектории навесная и настильная совпадают).

Свойства границы досягаемости: координатным (традиционным) способом (ограниченные возможности для исследования).

Теорема 7. «Парабола безопасности (максимального удаления)». Докажите с помощью треугольника скоростей, что:

1) в точке границы досягаемости скорость V_k всегда перпендикулярна скорости броска V_0 и является касательной к границе досягаемости;
2) скорость V_0 и V_k всегда направлены по биссектрисе между вертикалью и вектором перемещения, проведенным в точку границы досягаемости;
3) сумма модуля вектора перемещения S и высоты h для любой точки границы досягаемости – величина постоянная и прямо пропорциональна квадрату скорости броска;
4) граница досягаемости представляет собой параболоид (определите положение его фокуса, директрисы, величину фокального параметра).

Задача 3. «Неожиданно простые блиц задачи». С некоторой высоты бросили горизонтально тело. Известно, что нулевой уровень потенциальной энергии откалиброван так, что потенциальная энергия равна кинетической энергии брошенного тела ($E_К = E_П$):

1) под каким углом тело пересечет нулевой уровень потенциальной энергии;
2) докажите, что высота H_{max}, соответствующая уровню полной механической энергии, в два раза больше высоты H горизонтального броска ($H_{max}=2H$);
3) докажите, что дальность полета по горизонтали до точки пересечения уровня нулевой потенциальной энергии телом также равна H_{max} ($L=2H$);
4) докажите, что сумма радиус-вектора, проведенного из точки (0;0), и высоты, на которой находится в данный момент тело, величина постоянная и равная H_{max} ($r+h= H_{max}$);
5) докажите, что радиус-вектор, проведенный из точки (0;0), по модулю равен квадрату скорости тела в данный момент времени деленной на 2g $\left(r=\frac{V^2}{2g}\right)$;
6) докажите, что расстояние от тела до уровня полной механической энергии в любой момент времени равно модулю радиус-вектора, проведенного из точки (0;0);
7) докажите, что скорость тела V в данный момент времени всегда направлена по биссектрисе угла между вертикалью и радиус-вектором, проведенным из точки (0;0);
8) определите зависимость радиус-вектора, проведенного из точки (0;0), от угла между вертикалью и этим радиус вектором.
9) где находится фокус параболы, по которой движется тело, и где находится её директриса.

Задача 4. Дана вертикаль, две точки в пространстве и отрезок длинной $\frac{V^2}{2g}$. Определите геометрически, где расположена максимальная высота подъема тела, пролетающего через эти две точки. Рассмотрите все принципиально различные ситуации.

Задача 5. Докажите теорему 7 используя геометрические свойства парабол.

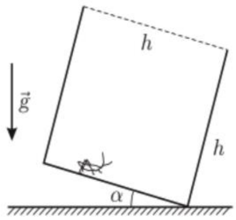
Поздравляю, теперь у нас несколько принципиально различных способов решения задач на оптимальный бросок!

Задача 6. **«Классическая задача о максимальной дальности полета».** При осаде древней крепости осаждённые вели стрельбу по наступающему противнику с помощью катапульт из-за крепостной стены высотой h = 20,4 м. Начальная скорость снарядов V_0 = 25 м/с. На каком максимальном расстоянии Lmax от стены находились цели, которых могли достигать снаряды катапульт? (ВсОШ, 2004, финал, 9кл)

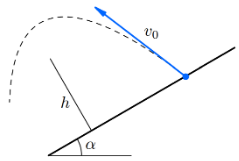
Задача 7. Склон горы составляет угол α с горизонтом. На какое максимальное расстояние вниз вдоль склона можно забросить камень, если его начальная скорость равна V_0?

Задача 8. С какой минимальной скоростью следует бросить камень с горизонтальной поверхности земли, чтобы он смог перелететь через дом с покатой крышей длинной S? Ближайшая стена имеет высоту h, задняя слева — высоту H.

Задача 9. В открытой прямоугольной коробке сидит кузнечик, который умеет прыгать с начальной скоростью V_0 = 3 м/с под любым углом к горизонту. На какой минимальный угол к горизонту нужно наклонить коробку, чтобы кузнечик смог из неё выпрыгнуть? Считать, что каждая грань коробки является квадратом со стороной h = 52 см. (МОШ, 2008, 10)



Задача 10. Плоская поверхность горы наклонена под углом α = 30^0 к горизонту. Перпендикулярно поверхности установлен тонкий забор, высшая точка которого находится на расстоянии h = 7 м от поверхности горы. Требуется перебросить через забор маленький камень, бросив его с поверхности горы. Найдите минимальную начальную скорость, при которой это можно сделать, если место броска и направление начальной скорости можно выбирать произвольно. («Физтех», 2011, 10 кл)



Задача 11. С вершины купола, имеющего форму полусферы радиуса R и стоящего на горизонтальной поверхности земли, бросают камень. С какой минимальной скоростью V_0 можно бросить, чтобы в процессе своего полёта он не ударился о поверхность купола? Под каким углом α к горизонту его следует бросать при этом? (IPhO 2012)

Задача 12. В боковой вертикальной стенке широкого сосуда с водой, заполненным до уровня H, имеется небольшое отверстие, расположенное на расстоянии h от поверхности воды в сосуде. Стенка сосуда находится у подножия холма, плоский склон которого направлен под углом α к горизонту. Чему должна быть равна высота h, чтобы дальность полета струи воды, вытекающей из отверстия, была максимальна (фольклор для α=0).

Ответы:

1. $h = \frac{gt_0^2}{9} = 10\text{м}$ и $V = \sqrt{\frac{5}{18}}gt_0 \approx 15{,}8\ \text{м}/c$

2. $L_{\max} = \begin{cases} v_0\sqrt{\frac{8H}{g}}, & \text{если } v_0^2 < 2gH; \\ 2H + \frac{v_0^2}{g}, & \text{если } v_0^2 \geqslant 2gH \end{cases}$

6. $\mathrm{L_{max}} = \frac{\mathrm{V_0}\sqrt{\mathrm{V_0}^2 - 2\mathrm{gh}}}{\mathrm{g}}$

7. $S_{\max} = \frac{V_0^2}{g(1-\sin\alpha)}$

8. $\mathrm{V_{min}} = \sqrt{\mathrm{g(h + S + H)}}$

9. $\alpha = \arccos\frac{V_0^2}{2gh} \approx 30^\circ$

10. $v_{0\,\min} = \sqrt{2gh\cos\alpha} \approx 11\ \text{м/с}$

11. $\mathrm{V_{min}} = \sqrt{\frac{\mathrm{g}R}{2}}$

12. $h = \frac{H}{2(1+\mathrm{tg}\alpha)}$