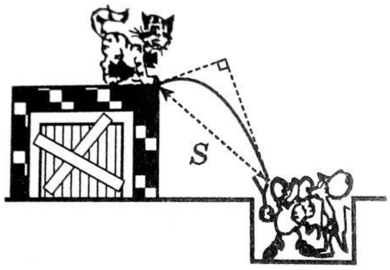
Мастер-класс Андрея Коновалова «Геометрия в физике. Современные идеи»

Теорема 1. «О медиане в треугольнике скоростей». Докажите, что средняя скорость при равноускоренном движении $\langle\vec{V}\rangle = \frac{\vec{S}}{t}$ является медианой в треугольнике скоростей $\vec{V}_K = \vec{V}_0 + \vec{g}t$. Перемещение за время t движения задаётся уравнением $\vec{S} = \vec{V}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}$.

Напомнить (рассказать) школьнику про свойства медиан и высот, проведенных к гипотенузе.

Задача 1. Кот Леопольд сидел у края крыши. Два озорных мышонка выстрелили в него камнем из рогатки. Камень, описав дугу, упал у ног кота через время t = 1с. На каком расстоянии S от мышей находится кот Леопольд, если векторы скоростей камня в момент выстрела и в момент падения были взаимно перпендикулярны? (ВсОШ, финал, 1999)



Задача 2. Из одной точки, расположенной достаточно высоко над поверхностью земли, одновременно вылетают два камня с коризонтальными противоположно направленными скоростями V_1 и V_2. Через какое время τ скорости этих камней станут перпендикулярны?

Задача 3. Тело брошено с высоты H под углом α к горизонтальной плоскости. К поверхности земли оно подлетает под углом β. Какое расстояние по горизонтали пролетит тело?

Напомнить (рассказать) школьнику про метод удваивание медианы (параллелограмм), связь между сторонами и диагоналями параллелограмма.

Задача 4. Скорость камня V_0, брошенного под углом φ = 60^0 к горизонту, уменьшилась вдвое за Δt = 1 с. Найдите модуль перемещения S, которое за это время совершил камень. (ВсОШ, 2012, Региональный этап, 9 кл)

Задача 5. Величина скорости камня, брошенного с горизонтальной плоскости под углом к горизонту, через время τ = 0,5 с после броска составляла α = 80% от величины начальной скорости, а ещё через τ соответственно β = 70%. 1) Найдите продолжительность T полёта камня. (ВсОШ, 2015, Региональный этап, 9 кл)

Теорема 2. «О квадратах скоростей». Докажите, что квадраты конечной скорости и начальной скорости связаны только через разность высот начальной и конечной точки и не зависят от углов $V_K{}^2 = V_0{}^2 - 2gH$.

Задача 6. Петя бросил мячик с балкона с начальной скоростью V стоящему на земле Васе. Через время t_1 = 2,21с Вася поймал мячик, заметив, что в конце полёта скорость мячика была направлена перпендикулярно его начальной скорости в момент броска, совершённого Петей. Затем Вася сделал несколько шагов, остановился и бросил мячик обратно на балкон Пете, сообщив мячику такую же по модулю начальную скорость V. Петя поймал мячик через время t_2 = 1,72с, заметив, что конечная скорость мячика также направлена перпендикулярно начальной скорости мячика в момент броска, совершённого Васей. Определите разницу высот H между кистями рук Пети и Васи, а также определите, чему равен модуль скорости V. (МОШ, 2017, 11)

Задача 7. С башни бросили тело со скоростью V_0, при этом угол β наименьший из всевозможных углов конечной скорости к горизонту. Определить высоту башни.

❶ *Напомнить (рассказать) школьнику про теорему косинусов и синусов (особенно синусов!)*

Задача 8. Со скалы, возвышающейся над морем на высоту h = 25 м, бросили камень. Найдите время его полёта, если известно, что непосредственно перед падением в воду камень имел скорость v = 30 м/с, направленную под углом β = 120^0 к начальной скорости. (МОШ, 2018, 9)

Задача 9. Начальная скорость камня, брошенного под некоторым углом к горизонту, равна V_0, а спустя время t его скорость составляет скорость V_K. На какую максимальную высоту H_{max} поднимется этот камень.

Ⓣ **Теорема 3. «О площади треугольника скоростей»**. Докажите, что площадь треугольника скоростей равна половине произведения дальности полета на ускорение свободного падения $S_\Delta = \frac{1}{2} Lg$.

❶ *Напомнить (рассказать) школьнику про формулы* $S_\Delta = \frac{1}{2} h_a a = \frac{1}{2} ab \sin\alpha = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$

Задача 10. Тело бросили со скоростью V_0 под углом к горизонту α. Определить дальность полета, если тело упало на туже горизонтальную плоскость.

Задача 11. Камень бросили под углом к горизонту с начальной скоростью V_0 = 25 м/с. Через время τ он достиг максимальной высоты, удалившись по горизонтали на расстояние L = 30 м от места броска. Найдите время τ. (ВсОШ, 2012, Региональный этап, 10 кл)

❶ *Напомнить (рассказать) школьнику как чевианы делят площадь треугольника.*

Задача 12. Задачи на бросание со склона или на склон. Камень бросают под углом α к горизонту с вершины горы, склон которой образует угол β с горизонтом. С какой скоростью V_0 нужно бросить камень, чтобы он упал на склон горы на расстоянии S от вершины?

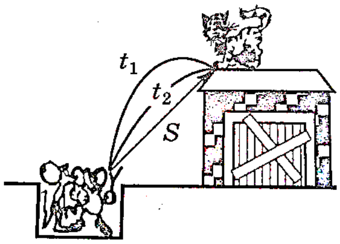
Задача 13. Пушка установлена на плоском склоне горы, образующем угол α = 30^0 с горизонтом. При выстреле «вверх» по склону снаряд падает на склон на расстоянии S_1 = 700 м от места выстрела. В момент падения скорость снаряда перпендикулярна поверхности склона. Пушку разворачивают на 180^0 и производят второй выстрел «вниз» по склону. Затем пушку перемещают на горизонтальную поверхность и производят третий выстрел. Угол наклона ствола к поверхности, с которой стреляют, при всех выстрелах одинаков. 1. На каком расстоянии S_2 от места второго выстрела снаряд упадет на склон? 2. Найдите дальность L стрельбы при третьем выстреле. («Физтех», 2019, 10)

Задача 14. Человек стреляет из пушки по мишени. На расстоянии 300 м от него стоит стенка высотой 120 м, за которой на расстоянии 100 м на земле стоит мишень. С какой скоростью ядро вылетит из пушки при удачном выстреле? («Курчатов», 2019, 9 кл)

Ⓣ **Теорема 4. «О равенстве равновеликих треугольниках».** Докажите, что два равновеликих треугольника с равным углом и равной противоположной стороной равны.

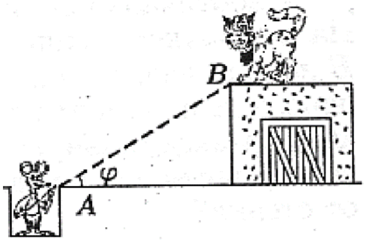
Задача 15. Из отверстия шланга, прикрытого пальцем, бьют две струи под углом α и β к горизонту с одинаковой начальной скоростью V_0. На каком расстоянии по горизонтали струи пересекутся?

Задача 16. Кот Леопольд стоял у края крыши сарая. Два злобных мышонка выстрелили в него из рогатки. Однако камень, описав дугу, через t_1 = 1,2 с упруго отразился от наклонного ската крыши сарая у самых лап кота и через t_2 = 1,0 с попал в лапу стрелявшего мышонка (см. рисунок). На каком расстоянии S от мышей находился кот Леопольд? (ВсОШ, 2000, финал, 9кл)



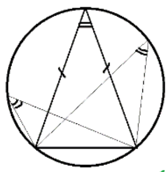
Задача 17. Из точки A склона с одинаковыми по модулю скоростями бросают два камня строго вдоль склона, камни приземляются в точку B. Чему равна скорость камней в точке B, если время полета одного камня t_1, а второго — t_2. Угол наклона склона относительно горизонта равен α.

Задача 18. Кот Леопольд сидел на самом краю крыши сарая. Два озорных мышонка решили выстрелить в него из рогатки, но кот заметил их и решил отстреливаться. Камни из рогаток мышат и кота вылетели одновременно и столкнулись в середине отрезка AB (см. рисунок). Найдите высоту H сарая и отношение пути, пройденного камнем кота Леопольда, к пути, пройденному камнем мышат, если известно, что φ = 30^0, скорость камня, вылетевшего из рогатки мышат, V_0 = 7 м/с, а кот выстрелил горизонтально. (ВсОШ, 2002, финал, 10 кл)

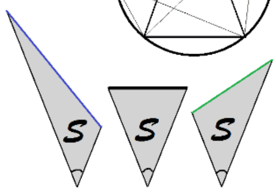


Задача 19. **«Классическая задача о максимальной дальности полета».** При осаде древней крепости осаждённые вели стрельбу по наступающему противнику с помощью катапульт из-за крепостной стены высотой h = 20,4 м. Начальная скорость снарядов V_0 = 25 м/с. На каком максимальном расстоянии Lmax от стены находились цели, которых могли достигать снаряды катапульт? (ВсОШ, 2004, финал, 9кл)

Теорема 5. «О максимальной площади». Если задан угол треугольника и противолежащая к этому углу сторона, то максимальная площадь достигается в случае *<u>равнобедренного треугольника</u>*.



Теорема 6. «О минимальной стороне». Если задана площадь и угол треугольника, то минимально возможная противолежащая к этому углу сторона достигается в случае *<u>равнобедренного треугольника</u>*.



Задача 20. Небольшую петарду подвесили на нити на высоте H над горизонтальной поверхностью. В результате взрыва она распалась на два осколка, которые полетели в противоположные стороны с одинаковыми начальными скоростями v0, направленными вдоль одной прямой. Какое наибольшее расстояние L может оказаться между осколками после их падения? С места падения осколки не смещаются. (ВсОШ, 2017, Региональный этап, 9 кл)

Задача 21. Склон горы составляет угол α с горизонтом. На какое максимальное расстояние вниз вдоль склона можно забросить камень, если его начальная скорость равна V_0?

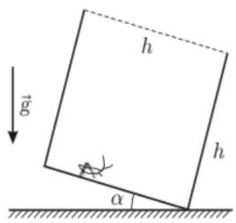
Показать школьнику, как из результата двух последних задач, можно получить уравнение **«параболы безопасности»** (**«параболы максимального удаления»**) в декартовых и полярных координатах.

Показать школьнику, как можно через **неравенство Птолемея** прийти к тому же еще быстрее.

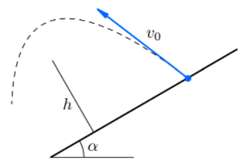
Показать школьнику геометрические свойства параболы и «параболы безопасности».

Задача 22. С какой минимальной скоростью следует бросить камень с горизонтальной поверхности земли, чтобы он смог перелететь через дом с покатой крышей длинной S? Ближайшая стена имеет высоту h, задняя слева — высоту H.

Задача 23. В открытой прямоугольной коробке сидит кузнечик, который умеет прыгать с начальной скоростью V_0 = 3 м/с под любым углом к горизонту. На какой минимальный угол к горизонту нужно наклонить коробку, чтобы кузнечик смог из неё выпрыгнуть? Считать, что каждая грань коробки является квадратом со стороной h = 52 см. (МОШ, 2008, 10)



Задача 24. Плоская поверхность горы наклонена под углом α = 30^0 к горизонту. Перпендикулярно поверхности установлен тонкий забор, высшая точка которого находится на расстоянии h = 7 м от поверхности горы. Требуется перебросить через забор маленький камень, бросив его с поверхности горы. Найдите минимальную начальную скорость, при которой это можно сделать, если место броска и направление начальной скорости можно выбирать произвольно. («Физтех», 2011, 10 кл)



Задача 25. С вершины купола, имеющего форму полусферы радиуса R и стоящего на горизонтальной поверхности земли, бросают камень. С какой минимальной скоростью V_0 можно бросить, чтобы в процессе своего полёта он не ударился о поверхность купола? Под каким углом α к горизонту его следует бросать при этом? (IPhO 2012)

Ответы:

1. $S = \frac{gt^2}{2}$
2. $\tau = \frac{\sqrt{\mathbf{V_1 V_2}}}{\mathbf{g}}$
3. $L = \frac{2H}{tg\beta - tg\alpha}$
4. $S = \sqrt{\frac{7}{12}} g\Delta t^2$
5. $T = \frac{3 - 4\alpha^2 + \beta^2}{1 - 2\alpha^2 + \beta^2}\tau$
6. $H = \frac{g}{4}(t_1^2 - t_2^2)$; $V = \frac{g}{2}\sqrt{t_1^2 + t_2^2}$
7. $H = \frac{V_0^2 tg^2\beta}{2g}$
8. t=4,4 с
9. $H = \frac{\left(V_0^2 + g^2t^2 - V_K^2\right)^2}{8g^3t^2}$
10. $L = \frac{V_0^2 Sin2\alpha}{g}$
11. $\tau = \sqrt{\frac{V_0^2 \pm \sqrt{V_0^4 - 4g^2L^2}}{2g^2}}$
12. $V_0 = \sqrt{\frac{Sg}{2\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha}}\cos\beta$
13. $S_2 = 3S_1$; $L = \sqrt{3}S_1$
14. V > 7,66 м/с
15. $L = \frac{2V_0^2}{g}\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{V_0^2}{g}\frac{2}{(tg\alpha + tg\beta)}$
16. $S = \frac{gt_1t_2}{2}$
17. $V_к = \frac{g}{2}\sqrt{t_1^2 + t_1^2 - 2t_1t_2\sin\varphi}$
18. $H = \frac{V_0^2}{g\left(1 + \frac{ctg^2\varphi}{4}\right)}$
19. $L_{max} = \frac{V_0\sqrt{V_0{}^2 - 2gh}}{g}$
20. $L_{\max} = \begin{cases} v_0\sqrt{\frac{8H}{g}}, & \text{если } v_0^2 < 2gH; \\ 2H + \frac{v_0^2}{g}, & \text{если } v_0^2 \geqslant 2gH \end{cases}$
21. $S_{\max} = \frac{V_0^2}{g(1 - \sin\alpha)}$
22. $V_{min} = \sqrt{g(h + S + H)}$
23. $\alpha = \arccos\frac{V_0^2}{2gh} \approx 30^\circ$
24. $v_{0\,\min} = \sqrt{2gh\cos\alpha} \approx 11$ м/с
25. $V_{min} = \sqrt{\frac{gR}{2}}$